Tutorium 02 Mustererkennung

Aufgaben

Die folgenden Aufgaben sollten, soweit möglich, zu Hause vorbereitet werden. Im Tutorium werden dann die Lösungswege besprochen.

1. Delta-Lernregel mit Gradientenabstieg

   Gegeben sei ein einschichtiges Perceptron, das durch ein überwachtes Lernverfahren mit Hilfe des Gradientenabstiegs trainiert werden soll. Das Netz enthält zwei Neuronen, die mittels Skalarprodukt aktiviert werden und durch verschiedene Ausgabefunktionen (lineare Ausgabefunktion und Fermifunktion) einen Output generieren. Beide Neuronen erhalten den gleichen Input $\vec{x^p}$ und werden auf den Targetvektor $\vec{t^p}$ trainiert. Weiterhin gilt, dass jedes Neuron einen unterschiedlichen Gewichtsvektor $\vec{w_i}$ besitzt.

   $\eta = 0.5$

   $\vec{x^p} = (0.1, 1.0, 0.6)$

   $\vec{t^p} = (1.0, 0.2)$

   $\vec{w_1} = (1.0, 0.5, -0, 4)$

   $\vec{w_2} = (1.0, 0.3, -0.8)$

   (a) Berechnen Sie die Aktivierung z, sowie die Ausgaben y für die Outputneuronen.

   (b) Bestimmen Sie den Differenzenvektor d bei gegebenem Teacher und ermitteln Sie den Output.

   (c) Geben Sie die allgemeine Delta-Lernregel des Fehler-Anstiegsverfahrens sowie die Lernregel bei linearer und sigmoidaler Ausgabefunktion an.

   (d) Führen Sie für beide Neuronen jeweils einen Lernschritt aus und bestimmen Sie die neuen Gewichte.

2. Hautpachsentransformation

   Gegeben sind die folgenden Datenwerte der Klassen K_1 und K_2:

   $$a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Skizzieren Sie die Verteilungen und berechnen Sie die Klassenmittelwerte M_1, M_2 sowie den Gesamtmittelwert M_0.

   (b) Berechnen Sie die Kovarianzmatrix C und ermitteln Sie die Eigenwerte.

   (c) Transformieren Sie die Daten mit Hilfe des Eigenvektors zum grössten Eigenwert in den eindimensionalen Raum. Interpretieren Sie ihre Ergebnisse.

3. Lineare Diskriminanzanalyse
   (a) Schätzen Sie die Kovarianzmatrizen S_W und S_T mit den Daten aus der vorangegangenen Aufgabe.
   (b) Berechnen Sie die LDA-Matrix und transformieren Sie die Daten in den eindimensionalen Raum.
   (c) Vergleichen Sie ihre Resultate mit der Hauptachsentransformation.
4. Bayes'sche Entscheidungsregel
   (a) Wozu dient die Bayes'sche Entscheidungsregel?
   (b) Wie lautet die Formel zur Bayes'schen Entscheidungsregel?
   (c) Ein Arzt hat die folgenden Wahrscheinlichkeiten bezüglich der Krankheit seines Patienten getroffen.
   $P(Bronchitis) = 0.05$
   $P(Husten) = 0.25$
   $P(Husten|Bronchitis) = 0.8$
   Was bedeuten diese Werte?
   (d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Patient eine Bronchitis hat, wenn er hustet?
5. Maximum Likelihood Schätzung
   (a) Was ist die Maximum Likelihood Schätzung?
   (b) Welche Voraussetzungen muüssen gegeben sein?
   (c) Es liegen die folgenden Daten einer Verteilung vor:
   $x_1 = 0.4 \quad x_2 = 1.2 \quad x_3 = 1.8 \quad x_4 = -1.0 \quad x_5 = 0.7 \quad x_6 = 0.2$
   Es soll nun der Mittelwert und die Varianz der Datenwerte geschätzt werden unter der Annahme, dass die Daten normalverteilt sind.
   (d) Eine andere Verteilung hat die folgende Gestalt:
   $$f(t) = \begin{cases} \theta \cdot t^{\theta-1}, & t \in \{0,1\} \\ 0 & sonst \end{cases}$$
   Schätzen Sie den unbekannten Parameter θ durch einen Maximum Likelihood Ansatz.
6. Expectation-Maximization-Algorithmus

   Sie können die folgende Aufgabe auch mit Matlab lösen, sollten dann aber zumindest den Lösungsweg skizzieren.
   (a) Was ist eine Mischverteilung?

(b) Gesucht sind die Mittelwerte μ_1 und μ_2 einer Mischverteilung. Verwenden Sie den Kullback-Leibler-Abstand und die Startwerte $\mu_1 = -12$, $\sigma_1 = 3.5$ sowie $\mu_2 = 11$, $\sigma_2 = 2.6$.

Gegebene Beobachtungen:

$x_1 = -3.6 \quad x_2 = -3.95 \quad x_3 = -5.15 \quad x_4 = -2.55$

$x_5 = 4.8 \quad x_6 = 5.35 \quad x_7 = 7.00 \quad x_8 = 6.05$